

因式分解进阶一（加油站）

一、系数为整式的十字相乘法

1. 因式分解： $k^2 - (a + b)k + ab$.

【答案】 $(k - a)(k - b)$.

【解析】 略

【标注】 【知识点】 二次项系数不为 ± 1 的十字相乘

2. 分解因式 $kx^2 - (4k + 1)x + 3k + 3$

【答案】 $(x - 3)(kx - k - 1)$.

【解析】 $kx^2 - (4k + 1)x + 3k + 3$
 $= (x - 3)[kx - (k + 1)]$
 $= (x - 3)(kx - k - 1)$.

【标注】 【知识点】 系数为整式的十字相乘

3. 分解因式 $(m + 1)x^2 - (m + 3)x + 2$.

【答案】 $(x-1)(mx+x-2)$.

【解析】 $(m+1)x^2 - (m+3)x + 2$
 $= (x-1)[(m+1)x - 2]$
 $= (x-1)(mx+x-2)$.

【标注】【知识点】系数为整式的十字相乘

4. 因式分解： $a^2 + a(b-2c) - c(b-c)$.

【答案】 $(a-c)(a+b-c)$.

【解析】 原式 = $(a-c)(a+b-c)$.

【标注】【知识点】系数为整式的十字相乘

5. 分解因式： $mx^2 - (m^2 + m + 1)x + m^2 + m$.

【答案】 $(mx - m - 1)(x - m)$

【解析】 原式 $= mx^2 - (m^2 + m + 1)x + m(m + 1)$
 $= [mx - (m + 1)](x - m)$
 $= (mx - m - 1)(x - m).$

【标注】 【知识点】系数为整式的十字相乘

6. 分解因式：

(1) $ax^2 + (a + b)x + b.$

(2) $ax^2 + (ab + 1)x + b.$

(3) $(a - b)x^2 + 2ax + a + b.$

【答案】 (1) $(ax + b)(x + 1).$

(2) $(ax + 1)(x + b).$

(3) $(ax - bx + a + b)(x + 1).$

【解析】 (1) 原式 $= (ax + b)(x + 1).$

(2) 原式 $= (ax + 1)(x + b).$

(3) 原式 $= (ax - bx + a + b)(x + 1).$

【标注】 【知识点】系数为整式的十字相乘

7. 分解因式：

(1) $abcx^2 + (a^2b^2 + c^2)x + abc.$

(2) $kx^2 + k^2x + x + k^2 - 1.$

(3) $x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2.$

(4) $x^2 + xy - 6y^2 + x + 13y - 6.$

(5) $a^2 + ab - 6b^2 + 5a + 35b - 36.$

(6) $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 2x + 23y - 20.$

【答案】(1) $(abx + c)(cx + ab)$.

(2) $(kx + k + 1)(x + k - 1)$.

(3) $(x^2 + a^2 + b^2 + 2ab)(x^2 + a^2 + b^2 - 2ab)$.

(4) $(x + 3y - 2)(x - 2y + 3)$.

(5) $(a + 3b - 4)(a - 2b + 9)$.

(6) $(2x - 3y + 4)(3x + 2y - 5)$.

【解析】(1) 原式 $= ab \cdot cx^2 + (a^2b^2 + c^2)x + ab \cdot c = (abx + c)(cx + ab)$.

(2) 原式 $= kx^2 + (k^2 + 1)x + (k + 1)(k - 1) = (kx + k + 1)(x + k - 1)$.

(3) 原式 $= x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 = [x^2 + (a^2 + b^2)]^2 - (2ab)^2$
 $= (x^2 + a^2 + b^2 + 2ab)(x^2 + a^2 + b^2 - 2ab)$.

(4) 原式 $= x^2 + (y + 1)x + (-3y + 2)(2y - 3) = (x + 3y - 2)(x - 2y + 3)$.

(5) 原式 $= a^2 + (b + 5)a + (-3b + 4)(2b - 9) = (a + 3b - 4)(a - 2b + 9)$.

(6) 原式 $= 6x^2 + (2 - 5y)x + (-3y + 4)(2y - 5) = (2x - 3y + 4)(3x + 2y - 5)$.

【标注】【知识点】公式法综合应用

二、双十字相乘法

8. 因式分解： $x^2 + xy - 6y^2 + x + 13y - 6 = (\quad)$.

A. $(x + 2y + 3)(x + 3y - 2)$

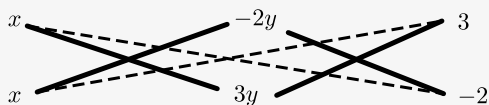
B. $(x + 2y + 3)(x - 3y - 2)$

C. $(x - 2y + 3)(x - 3y - 2)$

D. $(x - 2y + 3)(x + 3y - 2)$

【答案】D

【解析】应用双十字相乘法：



$$\therefore \text{原式} = (x - 2y + 3)(x + 3y - 2)$$

【标注】【知识点】双十字相乘法

9. 分解因式： $x^2 - xy - 2y^2 + 3x - 3y + 2$ () .

A. $(x + y + 2)(x - 2y - 1)$

B. $(x + y + 2)(x - 2y + 1)$

C. $(x + y - 2)(x - 2y + 1)$

D. $(x + y + 2)(x - 2y + 2)$

【答案】B

【解析】主元法或者双十字相乘法 .

【标注】【知识点】双十字相乘法；选主元法

10. 因式分解： $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 3ab + 4ac + 5bc$.

A. $(a + 2b + c)(a + b + 3c)$

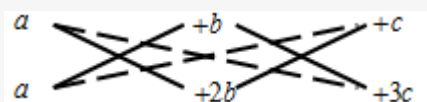
B. $(a + b + 3c)(a + 2b + c)$

C. $(a - b - c)(a - 2b - 3c)$

D. $(a + b + c)(a + 2b + 3c)$

【答案】D

【解析】应用双十字相乘法：



$$\therefore \text{原式} = (a + b + c)(a + 2b + 3c) .$$

【标注】【知识点】双十字相乘法

11. 分解因式： $x^2 - 2x - 2y^2 + 4y - xy$.

【答案】 $(x - 2y)(x + y - 2)$.

【解析】 $x^2 - 2x - 2y^2 + 4y - xy$
 $= (x^2 - xy - 2y^2) - (2x - 4y)$
 $= (x - 2y)(x + y) - 2(x - 2y)$
 $= (x - 2y)(x + y - 2) .$

【标注】【知识点】双十字相乘法

12. $x^2 + 2xy - 3y^2 + 3x + y + 2 .$

【答案】 $(x - y + 1)(x + 3y + 2) .$

【解析】原式 $= x^2 + (2y + 3)x - (3y^2 - y - 2)$
 $= x^2 + (2y + 3)x - (3y + 2)(y - 1) = (x - y + 1)(x + 3y + 2) .$

【标注】【知识点】双十字相乘法

13. 分解因式： $2x^2 + 2y^2 + 5xy + 4x + 5y + 2 .$

【答案】 $(2x + y + 2)(x + 2y + 1) .$

【解析】原式 $= 2x^2 + 5xy + 2y^2 + 4x + 5y + 2$
 $= (2x + y + 2)(x + 2y + 1) .$

【标注】【知识点】双十字相乘法

14. 分解因式：

(1) $1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc$.

(2) $a(6a + 11b + 4) + b(3b - 1) - 2$.

【答案】 (1) $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$.

(2) $(2a + 3b + 2)(3a + b - 1)$.

【解析】 (1) 把 a 视为未知数，其它视为参数

$$\text{原式} = a + ab + ac + abc + 1 + b + c + bc$$

$$= a(1 + b + c + bc) + (1 + b + c + bc)$$

$$= (a + 1)(1 + b + c + bc)$$

$$= (a + 1)(b + 1)(c + 1) .$$

(2) 将原式展开并写成关于 a 的二次三项式： $6a^2 + (11b + 4)a + 3b^2 - b - 2$,

$3b^2 - b - 2$ 可以分解为： $(3b + 2)(b - 1)$, 再次运用十字相乘法可知原式

$$= (2a + 3b + 2)(3a + b - 1) .$$

【标注】【知识点】双十字相乘法

【知识点】十字相乘法

【能力】运算能力

15. 分解因式：

(1) $x^2 + xy - 2y^2 - x + 7y - 6$.

(2) $(ab + bc + ac)(a + b + c) - abc$.

【答案】 (1) $(x + 2y - 3)(x - y + 2)$.

(2) $(a + c)(b + c)(a + b)$.

【解析】 (1) 原式 = $(x + 2y - 3)(x - y + 2)$.

(2) 原式 = $(a + c)(b + c)(a + b)$.

【标注】【知识点】双十字相乘法

16. 分解因式 :

(1) $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 2x + 23y - 20$.

(2) $10x^2 - 4y^2 + 18xy - 11x + 11y - 6$.

【答案】 (1) $(2x - 3y + 4)(3x + 2y - 5)$.

(2) $(5x - y + 2)(2x + 4y - 3)$.

【解析】 (1) 原式 = $(2x - 3y)(3x + 2y) + 2x + 23y - 20$

= $(2x - 3y + 4)(3x + 2y - 5)$.

(2) 略

【标注】【知识点】双十字相乘法

17. 分解因式 .

(1) $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 2x + 23y - 20$.

(2) $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3$.

(3) $x^2 - y^2 + 5x + 3y + 4$.

(4) $2x^2 - 7xy + 6y^2 + 2x - y - 12$.

【答案】(1) $(2x - 3y + 4)(3x + 2y - 5)$.

(2) $(x - y - 3)(x + y + 1)$.

(3) $(x + y + 1)(x - y + 4)$.

(4) $(x - 2y + 3)(2x - 3y - 4)$.

【解析】(1) $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 2x + 23y - 20 = (2x - 3y + 4)(3x + 2y - 5)$.

(2) $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = (x - y - 3)(x + y + 1)$.

(3) $x^2 - y^2 + 5x + 3y + 4 = (x + y + 1)(x - y + 4)$.

(4) $2x^2 - 7xy + 6y^2 + 2x - y - 12 = (x - 2y + 3)(2x - 3y - 4)$.

【标注】【知识点】双十字相乘法

三、主元法

18. 分解因式 $3xy + y^2 + 3x - 4y - 5$ 的结果是 ()

A. $(4y - 1)(3x - y + 5)$ B. $(2y + 1)(3x + y + 5)$ C. $(y + 1)(3x + y - 5)$ D. $(y - 1)(3x + y + 5)$

【答案】C

【解析】以 y 为主元排列，原式 $= y^2 + (3x - 4)y + 3x - 5 = (y + 1)(y + 3x - 5)$

【标注】【知识点】分组分解—五项式

19. 分解因式： $x^2 - 2xy + y^2 - x + y - 2$ 正确的是 () .

A. $(x - y - 2)(x - y + 1)$

B. $(3x - 2y + 2)(x + y - 1)$

C. $(x + y + 2)(x + y - 1)$

D. $(2x + y + 2)(x + y + 1)$

【答案】A

【解析】把 x 选作主元，

则原式

$$= x^2 - (2y + 1)x + y^2 + y - 2 = x^2 - (2y + 1)x + (y + 2)(y - 1) = (x - y - 2)(x - y + 1)$$

【标注】【知识点】选主元法

20. 分解因式： $2x^3 - x^2z - 4x^2y + 2xyz + 2xy^2 - y^2z = ()$.

- A. $(x - y)^2(2x - z)$ B. $(x - y)^2(2x + z)$ C. $(x + y)^2(2x - z)$ D. $(x + y)^2(2x + z)^2$

【答案】 A

【解析】 此题以 y 或 z 为主元比较简单，以取 y 为主元为例，

原式按 y 的降幂排列后为 $(2x - z)y^2 - 2x(2x - z)y + (2x - z)x^2$ ，

因式分解为 $(x - y)^2(2x - z)$.

故选择A .

【标注】 【知识点】 选主元法

21. 用主元法分解因式： $2x^2 - 7xy + 6y^2 + 2x - y - 12$.

【答案】 $(x - 2y + 3)(2x - 3y - 4)$.

【解析】 原式 = $(x - 2y + 3)(2x - 3y - 4)$.

【标注】 【知识点】 选主元法

22. 分解因式： $a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc$.

【答案】 $(a + b)(b + c)(c + a)$.

【解析】选 a 为主元，则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (b+c)a^2 + (b^2 + c^2 + 2bc)a + b^2c + bc^2 = (b+c)[a^2 + (b+c)a + bc] \\ &= (a+b)(b+c)(c+a) .\end{aligned}$$

【标注】【知识点】选主元法

23. 分解因式：

(1) $a^3 + a^2b + b^2 + 2b + 1$.

(2) $x^2 - 3y^2 + 2xy + yz - xz$.

【答案】(1) $(b+a+1)(b+a^2-a+1)$.

(2) $(x-y)(x+3y-z)$.

【解析】(1) 原式 $= b^2 + (a^2 + 2)b + (a^3 + 1)$
 $= b^2 + (a^2 + 2)b + (a+1)(a^2 - a + 1)$
 $= (b+a+1)(b+a^2-a+1)$.

(2) 方法一：以 x 为主元 .

$$\begin{aligned}\text{原式} &= x^2 + (2y-z)x + y(z-3y) \\ &= (x-y)(x+3y-z) .\end{aligned}$$

方法二：以 z 为主元 .

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (x^2 + 2xy - 3y^2) + (yz - xz) \\ &= (x-y)(x+3y) - (x-y)z \\ &= (x-y)(x+3y-z) .\end{aligned}$$

【标注】【知识点】选主元法

24. 分解因式：

(1) $ax^2 - a^2x - x^2 - 2x + a^2 + 2a$.

(2) $a(6a+11b+4) + b(3b-1) - 2$.

$$(3) 2a^2 - b^2 - ab + bc + 2ac.$$

【答案】 (1) $(x-a)(ax-x-a-2)$.

(2) $(2a+3b+2)(3a+b-1)$.

(3) $(a-b+c)(2a+b)$.

【解析】 (1) 法一：选 x 为主元，按 x 降幂排列：

$$\begin{aligned} & ax^2 - a^2x - x^2 - 2x + a^2 + 2a \\ &= (ax^2 - x^2) + (-a^2x - 2x) + (a^2 + 2a) \\ &= (a-1)x^2 + (-a^2-2)x + a(a+2) \\ &= (x-a)[(a-1)x - (a+2)] \\ &= (x-a)(ax-x-a-2). \end{aligned}$$

法二：选 a 为主元，按 a 降幂排列：

$$\begin{aligned} & ax^2 - a^2x - x^2 - 2x + a^2 + 2a \\ &= (-a^2x + a^2) + (ax^2 + 2a) + (-x^2 - 2x) \\ &= (-x+1)a^2 + (x^2+2)a - x(x+2) \\ &= (a-x)[(-x+1)a + (x+2)] \\ &= (a-x)(-ax+a+x+2) \\ &= (x-a)(ax-x-a-2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & a(6a+11b+4) + b(3b-1) - 2 \\ &= 6a^2 + 11ab + 4a + 3b^2 - b - 2 \\ &= 6a^2 + (11b+4)a + (b-1)(3b+2) \\ &= (2a+3b+2)(3a+b-1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) & 2a^2 - b^2 - ab + bc + 2ac \\ &= 2a^2 + (-ab+2ac) + (-b^2+bc) \\ &= 2a^2 + (-b+2c)a + b(-b+c) \\ &= (a-b+c)(2a+b). \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次项系数不为 ± 1 的十字相乘

25. 分解因式 .

(1) $a(6a + 11b + 4) + b(3b - 1) - 2$.

(2) $x^3 - ax^2 - 2ax + a^2 - 1$.

(3) $2a^2b^2 + 10a^2b + 12a^2 - 3ab^2 - 15ab - 18a - b^2 - 5b - 6$.

【答案】 (1) $(2a + 3b + 2)(3a + b - 1)$.

(2) $(a - x + 1)(a - x^2 - x - 1)$.

(3) $(b + 2)(b + 3)(2a^2 - 3a - 1)$.

【解析】 (1) 将原式展开并写成关于 a 的二次三项式： $6a^2 + (11b + 4)a + 3b^2 - b - 2$,
 $3b^2 - b - 2$ 可以分解为： $(3b + 2)(b - 1)$,

再次运用十字相乘法可知 ,

原式 = $(2a + 3b + 2)(3a + b - 1)$.

(2) 原式 = $a^2 - (x^2 + 2x)a + x^3 - 1$
 $= a^2 - (x^2 + 2x)a + (x - 1)(x^2 + x + 1)$
 $= (a - x + 1)(a - x^2 - x - 1)$.

(3) 视 “ a ” 为主元 , 则

原式 = $2(b^2 + 5b + 6)a^2 - 3(b^2 + 5b + 6)a - (b^2 + 5b + 6)$
 $= (b^2 + 5b + 6)(2a^2 - 3a - 1)$
 $= (b + 2)(b + 3)(2a^2 - 3a - 1)$.

视 “ b ” 为主元 , 则

原式 = $(2a^2 - 3a - 1)b^2 + 5(2a^2 - 3a - 1)b + 6(2a^2 - 3a - 1)$
 $= (2a^2 - 3a - 1)(b^2 + 5b + 6)$
 $= (b + 2)(b + 3)(2a^2 - 3a - 1)$.

【标注】【知识点】选主元法

26. 分解因式：

(1) $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3$.

(2) $x^2 - y^2 + 5x + 3y + 4$.

(3) $x^2 + 4xy + 3y^2 + 3x + 5y + 2$.

(4) $2x^2 - 5y - 5xy + 3y^2 + 3x - 2$.

【答案】 (1) $(x + y + 1)(x - y - 3)$.

(2) $(x + y + 1)(x - y + 4)$.

(3) $(x + y + 1)(x + 3y + 2)$.

(4) $(x - y + 2)(2x - 3y - 1)$.

【解析】 (1) 选 x 为主元，按 x 降幂排列：

$$\begin{aligned} & x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 \\ &= x^2 - 2x - (y^2 + 4y + 3) \\ &= x^2 - 2x - (y + 1)(y + 3) \\ &= (x + y + 1)(x - y - 3) \end{aligned}$$

选 y 为主元亦可 .

$$\begin{aligned} (2) \quad & x^2 - y^2 + 5x + 3y + 4 \\ &= x^2 + 5x + (-y^2 + 3y + 4) \\ &= x^2 + 5x + (y + 1)(-y + 4) \\ &= (x + y + 1)(x - y + 4) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & x^2 + 4xy + 3y^2 + 3x + 5y + 2 \\ &= x^2 + (4xy + 3x) + (3y^2 + 5y + 2) \\ &= x^2 + (4y + 3)x + (y + 1)(3y + 2) \\ &= (x + y + 1)(x + 3y + 2) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & 2x^2 - 5y - 5xy + 3y^2 + 3x - 2 \\ &= 2x^2 + (-5xy + 3x) + (3y^2 - 5y - 2) \\ &= 2x^2 + (3 - 5y)x + (y - 2)(3y + 1) \end{aligned}$$

$$= (x - y + 2)(2x - 3y - 1).$$

【标注】【知识点】选主元法

27. 分解因式：

(1) $4x^3 - 31x + 15$.

(2) $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$.

(3) $x^2 - 2x - 2y^2 + 4y - xy$.

(4) $x^7 + x^5 + 1$.

(5) $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$.

【答案】(1) $(2x - 1)(2x - 5)(x + 3)$.

(2) $(a + b + c)(a + b - c)(c - a + b)(c + a - b)$.

(3) $(x - 2y)(x + y - 2)$.

(4) $(x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

(5) $(x + 1)(x - 1)(x + 4)(x - 2)$.

【解析】(1) 原式 $= 4x^3 - x - 30x + 15$

$$= x(2x + 1)(2x - 1) - 15(2x - 1)$$

$$= (2x - 1)(2x - 5)(x + 3) .$$

(2) 原式 $= 4a^2b^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2)$

$$= (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

$$= (a + b + c)(a + b - c)(c - a + b)(c + a - b) .$$

(3) 原式 $= (x^2 - xy - 2y^2) - (2x - 4y)$

$$= (x - 2y)(x + y) - 2(x - 2y)$$

$$= (x - 2y)(x + y - 2) .$$

(4) 原式 $= x^7 + x^6 + x^5 + 1 - x^6$

$$= x^5(x^2 + x + 1) + (1 - x)(1 + x + x^2)(1 + x^3)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1) .$$

$$\begin{aligned} (5) \text{ 原式} &= (x^4 - x^2) + (2x^3 - 2x) - (8x^2 - 8) \\ &= (x+1)(x-1)(x+4)(x-2) . \end{aligned}$$

【标注】【知识点】拆添项法